

STICHTING  
MATHEMATISCH CENTRUM  
2e BOERHAAVESTRAAT 49  
AMSTERDAM  
S 73 (M 14a)

Trendtoets met behulp van  $m+1$  rangschikkingen

Ph. van Elteren



Statistische Afdeling

S 73 (M 14a)

door

Ph. van Elteren.

Trendtoets met behulp van  $m+1$  rangschikkingen<sup>1)</sup>.

Het kan voorkomen, dat men de methode der  $m$  rangschikkingen wenst toe te passen om na te gaan of er een "trend", d.w.z. een gemeenschappelijk stijgend of dalend verloop aanwezig is in  $m$  reeksen waarnemingen van  $n$  objecten. Wij kunnen de toets voor dit doel verscherpen, door aan het rangnummerschema der waarnemingen de rij  $1, 2, \dots, n$  of de rij  $n, n-1, \dots, 1$  toe te voegen, al naar gelang de trend, die wij wensen op te sporen, stijgend dan wel dalend is.

Wij maken hierbij gebruik van de volgende feiten:

- 1°. De grootte  $S$  van de methode der  $m$  rangschikkingen verandert niet, indien wij de kolommen permuteren.
- 2°. De verdeling van  $\underline{S}$  onder de hypothese  $H_0$ <sup>2)</sup> verandert niet indien wij de kolommen permuteren.
- 3°. Wij kunnen dus de verdeling van  $\underline{S}$  onder de hypothese  $H_0$  berekenen, door een schema van  $m$  rijen te beschouwen, bestaande uit de getallen  $1, 2, \dots, n$ , waarvan een rij vast ligt (b.v.: in de volgorde  $1, 2, \dots, n$ ) terwijl alle permutaties van de overige rijen even waarschijnlijk en onderling onafhankelijk zijn.

Hieruit volgt dat indien wij aan een schema van  $m$  rijen waarvoor de hypothese  $H_0$  geldt, de vaste rij  $1, 2, \dots, n$  of  $n, n-1, \dots, 1$  toevoegen, de grootte  $\underline{S}$  van het uitgebreide schema verdeeld zal zijn als de  $\underline{S}$  van een schema met  $m+1$  rangschikkingen onder de hypothese  $H_0$ .

Indien in het oorspronkelijke schema  $H_0$  niet geldt, doch een gemeenschappelijk stijgende trend aanwezig is, dan zal door toevoeging van de rij  $1, 2, \dots, n$  de stijgende trend in de kolomtotalen versterkt worden, waardoor men kan verwachten, dat er spoediger een significant resultaat zal optreden.

Evenzo kan door toevoeging van de rij  $n, n-1, \dots, 1$  een dalende trend van de kolomtotalen versterkt worden.

-----  
1) Dit memorandum is een aanvulling op memorandum S 47 (M 14). Het is slechts bedoeld ter oriëntatie en streeft niet naar volledigheid of volledige exactheid.

2)  $H_0$  houdt in, dat in iedere rangschikking alle permutaties der rangnummers gelijke waarschijnlijkheid bezitten en dat de rangschikkingen stochastisch onafhankelijk zijn.

Wij wijzen er met nadruk op, dat de richting van de trend, waartegen  $H_0$  getoetst wordt, gegeven moet zijn. De toets is éénzijdig en is nog niet op geschikte wijze tot een tweezijdige toets uitgebreid.

Indien nu b.v. tegen stijgende trend wordt getoetst, dus de rij  $1, 2, \dots, n$  wordt <sup>toegevoegd</sup> en de  $m+1$  rangschikkingen een significante overeenstemming vertonen, zou het zeer goed denkbaar zijn dat de kolomtotalen toch <sup>geen</sup> stijgende trend zouden vertonen. Indien nl. de  $m$  gegeven rangschikkingen zeer goed overeenstemmen en  $m$  niet te klein is, blijft deze significantie bij toevoeging van iedere rij rangnummers behouden. In een dergelijk geval zou men dus zowel bij toevoeging van de rij  $1, 2, \dots, n$  als van de tegengestelde rij  $n, n-1, \dots, 1$  een significante overeenstemming tussen de  $m+1$  rangschikkingen kunnen vinden. Wij stellen daarom nog een extra eis, waaraan voldaan moet zijn, willen wij  $H_0$  verwerpen ten gunste van de hypothese van een stijgende trend (voor een dalende trend analoog). Niet alleen eisen wij, dat er een significante overeenstemming (met onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$ ) bestaat tussen de  $m+1$  rangschikkingen, die verkregen zijn na toevoeging van de rij  $1, 2, \dots, n$ , maar bovendien moet de overeenstemming tussen deze  $m+1$  rangschikkingen beter zijn dan tussen de oorspronkelijke  $m$  rangschikkingen. Dit laatste valt aldus te preciseren: de overschrijdingskans, behorende bij de toets voor overeenstemming tussen de rangschikkingen, moet door toevoeging van de rij  $1, 2, \dots, n$  kleiner worden<sup>3)</sup>.

Door de toevoeging van deze eis daalt de onbetrouwbaarheid van de toets beneden de opgegeven onbetrouwbaarheidsdrempel  $\alpha$ . De grootte van deze daling is niet bekend; wel ziet men gemakkelijk in, dat deze daling niet groter dan  $\frac{1}{2}\alpha$  kan zijn. Indien de werkelijke onbetrouwbaarheid bekend was, zou de toets op bruikbare wijze tweezijdig gemaakt kunnen worden, hetgeen nu nog niet mogelijk is.

-----  
3) In plaats daarvan kan men b.v. ook eisen, dat de rij der kolomtotalen van  $m$  rangschikkingen positieve rangcorrelatie vertoont met de rij  $1, 2, \dots, n$  (vgl. S 47 (M 13)); dit maakt weinig of geen verschil met het bovenstaande.